Dynamique chaotique,
avons nous toute l'information ?

Vincent Régnard
<regnard@ganil.fr>

Ganil, Bd. H. Becquerel, BP 5527, 14076 Caen Cedex
LPC Caen, 6 Bd. Mal Juin 14050 Caen Cedex

1 Introduction

L'une des motivations importantes de la physique est de prévoir l'évolution dans le temps des systèmes étudiés, c'est à dire savoir quel a été leur passé et quel sera leur avenir, étant donné la connaissance dont nous disposons de son état à un instant donné.

Cette approche, la **dynamique**, repose sur deux ingrédients essentiels : les équations de la dynamique qui propagent dans le temps les caractéristiques mesurables du système (son état) et les conditions initiales qui précisent l'état du système à un instant de référence. L'étude expérimentale de différents systèmes révèle deux catégories d'évolution très différentes l'une de l'autre. Dans un premier cas, deux systèmes identiques se trouvant dans des conditions initiales infiniment proches l'une de l'autre vont avoir un même devenir à des instants ultérieurs, on parle alors de **dynamique régulière**. Dans d'autres cas, l'évolution dans le temps de systèmes initialement "identiques" s'avère complètement dissemblable et diverge dans l'espace des configurations du système, on parle alors de **chaos déterministe** [1, 2, 3, 4]. Comment interpréter cette incapacité à décrire les phénomènes complexes ? Y-a-t-il réellement deux sortes de dynamiques, deux catégories de systèmes, ceux pour lesquels nous savons prévoir le devenir précisément et ceux pour lesquels nous ne pouvons rien prédire, si ce n'est sur des intervalles de temps extrêmement courts ?

Afin d'apporter des éléments de réponse à ces questions, nous proposons dans cette contribution de présenter deux approches différentes de la dynamique de systèmes complexes. Dans un premier temps, nous rappellerons la façon dont est décrite la **dynamique de systèmes classiques** dans un espace de configuration continu et infini. Cette première approche nous permettra d'introduire les concepts nécessaires à la description du chaos. Dans un second temps, nous présenterons l'**approche quantique de la dynamique** d'un système complexe afin de proposer une interprétation possible du chaos se basant sur notre capacité à gérer la complexité de la description de ce système.

2 Dynamique classique d'un système complexe

La mécanique classique représente le système physique étudié, constitué de N entités élémentaires en interaction, dans un espace de configuration continu à *3N* dimensions [1, 5], c'est à dire comprenant *3N* axes correspondant à des mesures ou observations indépendantes réalisables sur ce système. L'état à un instant t donné du système est repéré dans cet espace par un vecteur contenant la valeur numérique de ces *3N* observations. Supposons le système composé d'un grand nombre d'entités élémentaires, nous pouvons l'imaginer comme un ensemble de points matériels dans notre espace euclidien traditionnel à 3 dimensions (Figure 1) Chacun de ces points i étant repérés à tout instant par la donnée des trois coordonnées $x_i(t)$, $y_i(t)$, $z_i(t)$ que l'on peut rassembler en un vecteurs $\vec{r_i}(t)$. L'ajout en chacun de ces points matériels d'une vitesse instantanée $\vec{v_i}(t)$ confère à la représentation de l'état du système une dimension dynamique. En regardant ce nouveau cliché, en haut à droite sur la figure 1, on peut imaginer comment était le système à l'instant précédant la photographie, son passé immédiat un infime instant plus tôt. Il nous est aussi possible d'imaginer ce qu'il deviendrait à l'instant juste après en déplaçant chacun des points le long de la flèche représentant sa vitesse d'une distance proportionnelle à l'intensité de cette dernière. Ceci nous conduit en fait à superposer au précédent espace des positions du système $\vec{r_i}(t)$ un

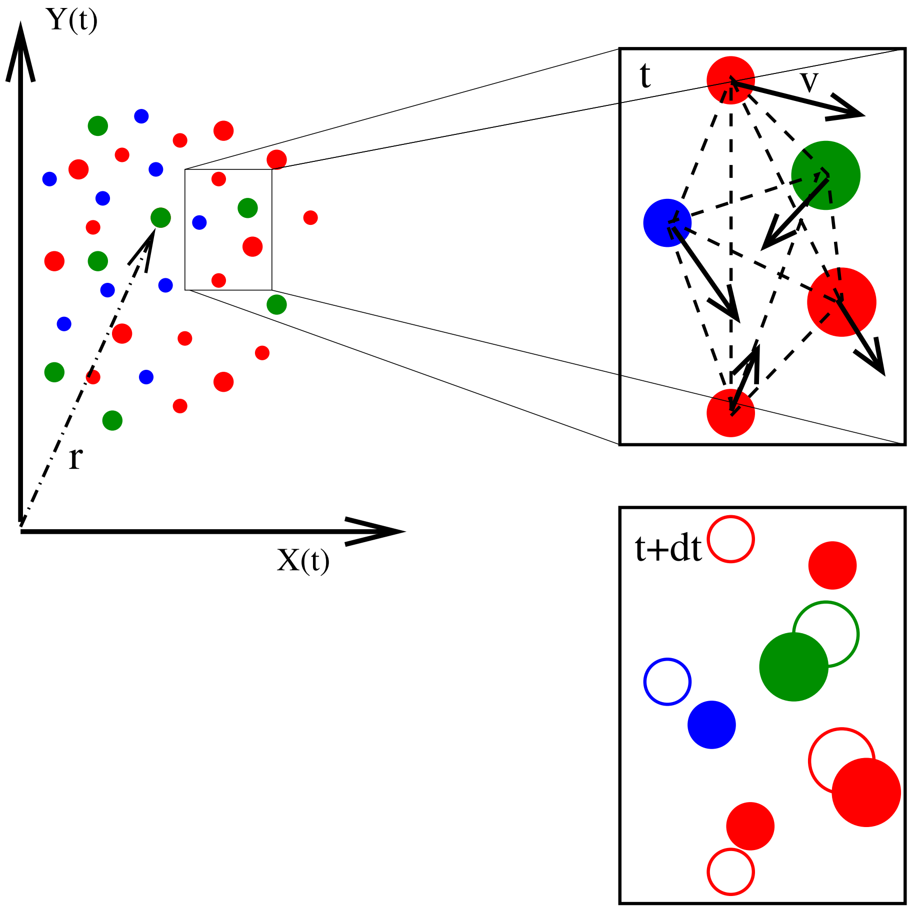

FIG. 1 – **Représentation du système** A gauche, l'ensemble des constituants du système peuvent être repérés par la donnée du vecteur position ($\vec{r}$) de chacun. A droite (haut) un grossissement de l'espace permet de voir schématiquement les interactions (tiret) entre tous les constituants ainsi que les vecteurs (flèches) représentant les vitesses de chacun à un instant t. En bas, le même système à un instant ultérieur très proche $t + \Delta t$, les constituants se sont déplacés parallèlement à leurs vitesses d'une longueur proportionnelle à celles-ci (les cercles vides représentent leurs positions à l'instant précédent).

deuxième espace, celui des vitesses $\vec{v_i}(t)$, permettant d'animer les objets du premier. La représentation de l'état dynamique du système implique donc l'utilisation d'un espace à 6N dimensions appelé espace des phases ou espace des configurations dans lequel chaque élément constituant le système est représenté par deux vecteurs $\vec{r_i}(t)$ et $\vec{v_i}(t)$ encore appelés coordonnées généralisées du système. Par cette simple expérience de pensée, nous venons de poser le principe de base de la dynamique classique d'un système physique complexe, c'est à dire l'évolution dans le temps de la représentation d'un ensemble d'entités en interaction.

Cette description simple ne tient jusqu'à présent pas compte du fait que toutes les entités élémentaires constituant le système interagissent les unes avec les autres. Pour ce faire, l'introduction d'une description mathématique un peu plus rigoureuse est nécessaire. Différentes approches ont été proposées au XIX^e siècle au moment où l'analyse mathématique et plus particulièrement le calcul différentiel connut un essor important. L'une d'entre elles propose de prendre en compte les interactions entre tous les constituants à travers une fonction mathématique appelée Hamiltonien $H(\vec{r_i}(t), \vec{v_i}(t))$. Cette fonction n'est autre que l'énergie totale du système exprimée en fonction des coordonnées généralisées du système à chaque instant. Elle contient généralement une partie cinétique traduisant l'agitation des corpuscules, une partie potentielle quand le système est soumis à un champ de force externe ou un potentiel de confinement et une partie d'interaction intrinsèque entre tous les constituants. La définition de cette fonction est cruciale dans toute étude dynamique d'un système, elle impose souvent une modélisation et des approximations.

Les équations d'Hamilton-Jacobi expriment la façon dont évolue à chaque instant l'ensemble des coordonnées du système. Elles lient toutes les positions $\vec{r_i}(t)$ et vitesses $\vec{v_i}(t)$ à travers des relations mettant en jeu l'Hamiltonien H pré-cité qui code mathématiquement "toute" la physique que l'on cherche à comprendre du système. Cet ensemble d'équations différentielles, que l'on nomme flot, fait intervenir des variations (dérivées) par rapport au temps des coordonnées représentant le système à chaque instant. Ces variations s'expriment elles-même en fonction de ces coordonnées, traduisant une auto-cohérence du système. La résolution de cet ensemble d'équations, c'est à dire la recherche des solutions $\vec{X} = \{\vec{r_i}(t), \vec{v_i}(t)\}$, est généralement complexe.

Les solutions de ce flot sont les trajectoires du système, c'est à dire l'ensemble des points représentant les états successifs du système dans l'espace des configurations. Cette trajectoire se développe sur une hypersurface de dimension *3N-1* du fait de la conservation de l'énergie qui contraint et lie les coordonnées du système.

Ces flots peuvent être rangés en deux grandes catégories[1]. Lorsque les équations ne sont pas ou très peu couplées, le flot est linéaire, la dynamique du système est dite stable, régulière ou intégrable. Il est possible, partant de conditions initiales particulières de prédire, avec les équations d'évolution, le devenir dans le temps du système pour tout instant t ultérieur fini. Si le flot est complexe, la dynamique devient très irrégulière. L'énergie du système se répartit alors très rapidement d'un degré de liberté vers un autre. Autrement dit, à un instant donné, une grande partie de l'information (l'énergie) concernant l'état du système se trouve contenue dans un petit nombre de coordonnées. Un bref instant plus tard, se sont d'autres coordonnées qui jouent un rôle important dans la dynamique, l'énergie s'est trouvée transférée des premières aux deuxièmes. Ainsi deux configurations proches dans le temps peuvent être très éloignées dans l'espace des configurations. La dynamique est de ce fait très sensible, une infime variation des conditions initiales conduit alors à deux dynamiques au devenir très différent.

Les équations d'évolution sont généralement très complexes et il est impossible de les résoudre exactement d'un point de vue analytique. Le problème doit alors être résolu numériquement. Connaissant la façon dont ces grandeurs varient instantanément, il est possible de les propager de façon itérative. Considérons la variation de la position de l'un des constituants de notre système pendant un intervalle de temps très court Δt. Sa position à l'instant $t + \Delta t$ est donnée par l'ajout à sa valeur initiale à l'instant t d'une contribution proportionnelle au temps écoulé Δt.

$$\vec{r_i}(t + \Delta t) = \vec{r_i}(t) + \frac{\partial \vec{r_i}(t)}{\partial t}\Delta t = \vec{r_i}(t) + \vec{v_i}(t)\Delta t \tag{1}$$

Cette opération n'est valide que si l'intervalle de temps Δt considéré

[1] *On considère que le flot devient chaotique lorsque apparaissent des courbes isopotentielles accessibles au système qui possèdent des singularités topologiques (points d'inflexions).*

est très petit par rapport au temps caractéristique d'évolution du système. Cette opération constitue en fait une approximation (d'ordre un) qui considère que la variation de la position de chacun des constituants a si peu bougé que l'on peut considérer les vitesses constantes pendant cet intervalle de temps. Ces dernières seront évaluées de nouveau lors de l'itération suivante par des considérations complètement analogues toujours grâce aux équations d'Hamilton qui donnent pour la variation de la vitesse une expression analogue à (1). Notons que Lyapunov [1] nous rappelle qu'il faudrait en toute rigueur tenir compte de tous les ordres supérieurs. Mais en pratique l'intervalle de temps Δt est toujours petit, et il suffit simplement de s'assurer que cette approximation demeure justifiée tout au long de la dynamique. Ce type de raisonnement permettant l'intégration numérique des équations du mouvement est très familier des numériciens, il est utilisé par exemple dans les modèles de dynamique moléculaire. Différents algorithmes [6] permettent de résoudre numériquement la problématique pourvu que les systèmes étudiés soient assez simples.

L'étude d'un système très simple constitué de deux entités en interaction tels deux oscillateurs reliés par un élastique (comme deux enfants sur deux balançoires se tenant la main) nous permet d'étudier les différents types de dynamique. La mise en équations ne présente pas de difficultés, elle correspond à la description bien connue de deux oscillateurs rappelés par une force vers leur point d'équilibre auxquels nous avons pris soin d'ajouter une interaction élastique. Dans ce dernier terme est introduit un paramètre qui tient compte de la rigidité de cet élastique de sorte qu'il soit possible de faire varier à travers ce paramètre l'intensité du couplage entre les oscillateurs. La résolution numérique des équations d'évolution pour différentes intensités de couplage nous donne l'évolution dans le temps des coordonnées repérant l'état de ces oscillateurs à chaque instant (trajectoires) ainsi que les vitesses des deux objets.

La représentation graphique de ces grandeurs en fonction du temps nous apporte une première information qualitative concernant la nature des trajectoires et de la dynamique du système. Pour de très faibles couplages, les objets oscillent de façon périodique très régulière (sinusoïdes), l'amplitude des oscillations reste la même au cours du temps, ce comportement caractérise une dynamique régulière. L'augmentation progressive de l'intensité du couplage entre ces deux systèmes conduit à une évolution dans le temps de moins en moins régulière. La fréquence des oscillations augmente, leur amplitude varie d'une oscillation à l'autre ainsi que la fréquence[2] pour devenir complètement erratiques lorsque le régime chaotique est atteint, la phase de désordre est alors réalisée. Il n'existe alors plus de fréquence d'oscillation privilégiée, l'évolution est complètement apériodique, l'énergie totale du système se transfert très rapidement d'un degré de liberté vers un autre. Connaissant l'état initial du système, il n'est alors pas possible de prévoir de façon analytique le devenir de chacune des grandeurs caractérisant ce système aux instant futurs. Seul un calcul numérique permet d'accéder à ces informations. Si le système est extrêmement chaotique, l'estimation de l'état du système à des instants éloignés peut s'avérer incalculable : le temps nécessaire pour obtenir cette information peut devenir infini et les troncatures des nombres peuvent induire un chaos numérique incontrôlable. De même, si l'on observe un tel système à un instant précis, la moindre erreur de mesure sur son état nous empêche de remonter son histoire pour savoir comment il pouvait être à des instants reculés, sauf peut-être pour des instant très proches.

En considérant deux trajectoires initialement très proches l'une de l'autre, toutes deux solutions des équations d'évolution, et en comparant leur devenir sur des courts instants il est possible de quantifier l'aspect chaotique de leur dynamique. Si la distance dans l'espace des configurations à $3N$ dimensions entre ces deux trajectoires évolue exponentiellement avec le temps, le système est chaotique et la mesure de l'intensité de leur divergence permet d'introduire le coefficient de Lyapunov mesurant la chaoticité de la dynamique. Si ces trajectoires initialement très proches ne divergent pas mais s'écartent un peu puis se rapprochent l'une de l'autre tout en restant dans un infime volume autour de l'une d'elles prise comme référence, alors la dynamique est régulière. Il n'y a dans ce dernier cas pas d'amplification de l'indétermination ou imprécision initiale, et observer l'une ou l'autre des deux trajectoires est équivalent dans la mesure où leur différence initiale est négligeable.

[2] *Lorsque la phase désordonnée est réalisée, le spectre de Fourrier associé à l'évolution dans le temps des coordonnées généralisées est plat tandis qu'une dynamique régulière est associée à un spectre de pics correspondant aux fréquences d'oscillations propres des sous-systèmes.*

Enfin la représentation (section) de Poincaré permet une représentation différente des trajectoires afin de statuer sur leur instabilité éventuelle. Retenons simplement que dans cette représentation, les trajectoires stables forment des courbes régulières (de dimension 1) tandis qu'une trajectoire extrêmement instable (ergodique) explore seule l'intégralité de l'espace des configurations et remplit uniformément la représentation de Poincaré.

Nous venons de présenter les caractéristiques d'un comportement chaotique dans la description classique. Nous avons vu qu'un tel comportement apparaît dans un système complexe quand les entités élémentaires le constituant interagissent fortement les unes avec les autres, que ce soit par l'intermédiaire de forces à longue portée ou par des chocs. Nous avons vu que le chaos se traduit par une extrême sensibilité aux conditions initiales et une divergence des trajectoires initialement proches sans en proposer d'explication. Dans la partie suivante, nous allons tenter d'apporter une piste explicative en regardant ce que peut nous apporter une description quantique d'un système analogue qui à la limite classique doit conduire aux mêmes observations.

3 Dynamique exacte d'un système quantique

La mécanique quantique adopte une description du système physique légèrement différente de celle que nous venons de présenter [7, 8, 9]. Elle associe à chaque système deux types d'objets, les états et les observables. L'état du système peut être repéré dans un espace discret par un jeu de coefficients, analogues des coordonnées de notre précédent système classique. Les observables sont des êtres mathématiques caractérisant les grandeurs physiques mesurables qui combinées à un état permettent de prévoir statistiquement le résultat des expériences envisagées. Par exemple l'Hamiltonien est l'observable correspondant à l'énergie totale du système et joue un rôle particulier puisqu'elle gouverne à elle seule toute la dynamique à travers l'équation d'évolution de Schroedinger.

Afin d'illustrer ce propos, considérons un système simple de deux petits aimants quantiques en interaction schématisés en haut de la figure 2. Chacun des petits aimants peut se trouver dans J états quantiques discrets différents indiqués sur l'axe de gauche et repérés par leur projection $m1$ et $m2$. Il existe alors J^2 états quantiques possibles pour le système

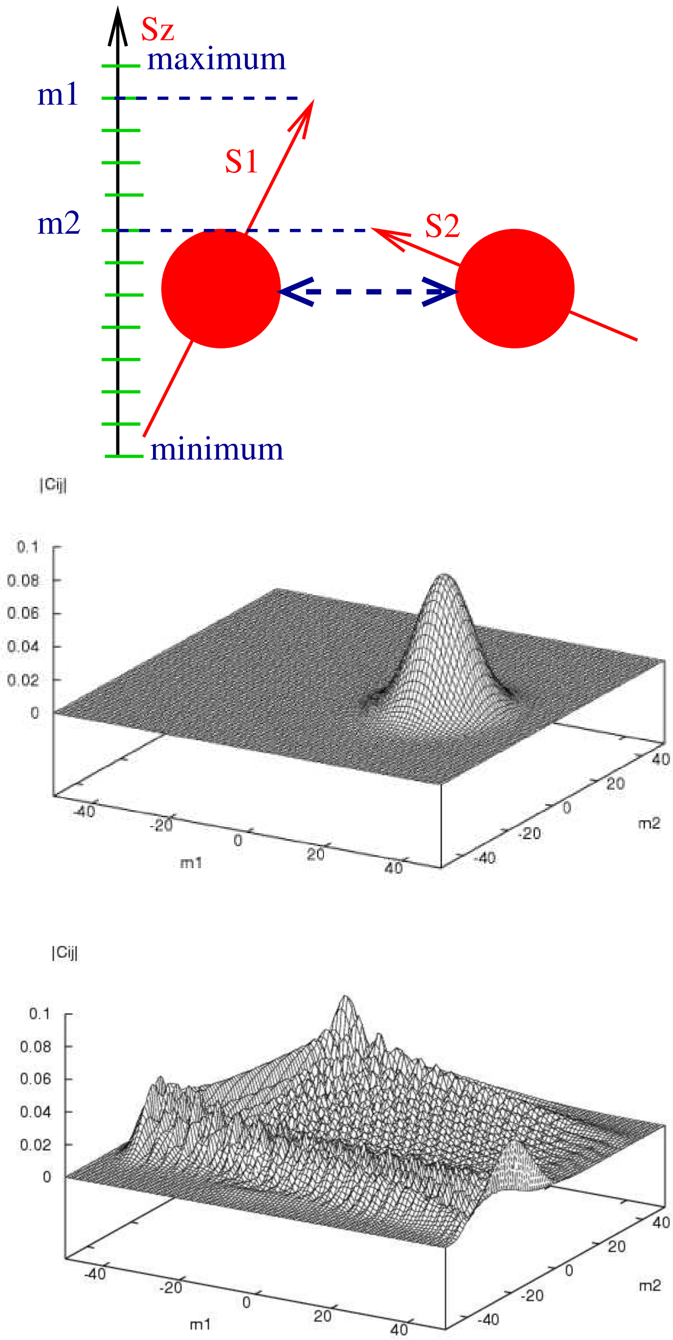

FIG. 2 – **État du système** En haut deux moments magnétiques S1 et S2 en interaction. Leurs projections sur l'axe d'observation Sz à gauche ne peut prendre que des valeurs discrètes entre un minimum et un maximum. Au centre, le paquet d'onde initial gaussien est facilement repéré par un petit jeu de paramètres tels le centroïde de la cloche et sa largeur. Du fait du couplage entre les deux aimants, ce paquet d'onde s'étale au cours du temps comme le montre la figure du bas et se diffuse dans l'espace des états, sa représentation devient complexe et nécessite l'évaluation de nombreuses observables.

total (toutes les combinaisons possibles des deux valeurs $m1$ et $m2$). Si l'on veut savoir dans quel état se trouve le système, il suffit d'effectuer J^2 observations indépendantes[3], c'est à dire l'action de J^2 opérateurs sur l'état instantané du système. Ces J^2 observations permettent de déterminer les J^2 coefficients Cij caractérisant l'état quantique du système à un quelconque instant. La figure centrale sur la figure 2 montre par exemple l'état initial que nous avons choisi pour notre simulation. Il s'agit d'un paquet d'onde gaussien à deux dimensions, centré sur une valeur de $m1$ et une valeur de $m2$ dans cette représentation choisie. L'axe s'étirant vers le haut figure les coefficients Cij caractérisant l'état du système tandis que les deux autres axes du plan horizontal caractérisent les états possibles $m1$ et $m2$ de chacun des petits aimants. Nous voyons que la donnée des coordonnées du centre de cette courbe en cloche apporte une bonne information sur l'état total du système : globalement dire que l'aimant 1 à une aimantation $m1 = 35$ et l'aimant 2 un aimantation $m2 = -20$ caractérise assez bien le système. L'évaluation de deux observables $Sz1$ et $Sz2$ mesurant la valeur attendue de la projection de ce paquet d'onde sur chacun des axes $m1$ et $m2$ apporterait par exemple une information suffisante pour caractériser cet état. On dirait dans ce cas que ces deux observables $Sz1$ et $Sz2$ sont des observables pertinentes. Si l'on ajoute à ces deux dernières les observables mesurant la largeur du paquet, on dispose alors d'un ensemble d'observables pertinentes qui nous apporte une information relativement complète de notre système à un instant donné. On peut ainsi croire que suivre dans le temps la valeur de ces observations peut s'avérer suffisant pour bien décrire l'état du système.

Nous avons introduit une très faible interaction entre ces petits aimants et effectué le calcul de la dynamique exacte de ce système. L'état obtenu après un très court instant est représenté au bas de la figure 2. On remarque que l'information sur le système est alors répartie dans tous l'espace des états et non plus localisée dans une petite zone de celui-ci. Le couplage entre les degrés de liberté du système a réparti l'information initialement contenue dans un petit nombre d'observables sur tous les degrés de liberté du système. Dans cette représentation il devient difficile

[3] *Nous supposons ici que nous connaissons parfaitement l'Hamiltonien du système permettant de propager l'état initial parfaitement connu du système. L'espace des états est de dimension finie.*

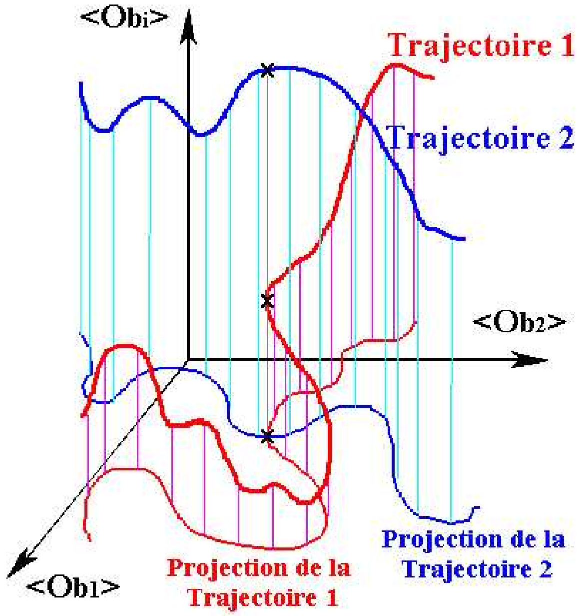

FIG. 3 – **Projection de la dynamique**

de caractériser l'état du système. Si l'on souhaitait se lancer dans une telle aventure, il faudrait faire appel à un grand nombre d'observations indépendantes. Il serait alors bien difficile de se représenter les valeurs attendues de toutes ces observables du fait de leur grand nombre et de leur sens physique difficilement perceptible. Si l'on se borne à ne regarder qu'un petit nombre d'observables simples, comme celle décrivant les intensités des moment magnétique $m1$ et $m2$. L'information sur le système est alors très incomplète. L'évolution dans le temps de ces observations mime un comportement chaotique au même titre que ce que nous avons signalé au début de cette discussion concernant la description classique. L'évolution des observations est hautement apériodique, les trajectoires observées dans cet espace réduit envahissent à l'image des paquets d'ondes tous les recoins de cet espace d'observation.

D'un point de vue formel, si le Hamiltonien traduisant l'interaction de tous les constituants est défini et si l'on connaît exactement l'état du système à un instant précis, c'est à dire si l'on connaît la valeur numérique de tous les coefficients caractérisant le vecteur d'état, alors l'équation de Schroedinger permet de connaître exactement l'état du système à tout instant ultérieur. C'est en ce sens que l'on affirme qu'il ne peut y avoir de chaos en mécanique quantique [10]. Les systèmes à N-corps que nous aimons étudier peuvent être décrits rigoureusement par ce formalisme, mais leur complexité fait qu'il est impossible et surtout inutile d'envisager une telle description. Il est alors préférable de restreindre l'étude de la dynamique à l'observation d'un petit nombre de variables pertinentes. Ainsi la dynamique quantique exacte du système doit être projetée dans un sous espace d'observation pertinent comme le montre la figure 3. Sur cette représentation schématique, les différents axes d'observation servent à repérer les trajectoires du système. Les observations $< Ob1 >$ et $< Ob2 >$ correspondent à des observables pertinentes sensées apporter une information importante sur le système. Ce sont par exemple les projections $Sz1 = m1$ et $Sz2 = m2$ pour nos aimants. On attend de l'ensemble des observations pertinentes qu'il nous apporte une information globale aussi complète que possible sur le système. Le troisième axe vers le haut de la figure représente toutes les autres dimensions que l'on oublie en effectuant la projection de la dynamique dans le sous espace $\{< Ob1 >, < Ob2 >\}$, ce sont les très nombreuses observables jugées non pertinentes qui jouent cependant un rôle sur la dynamique. La figure 3 montre deux trajectoires ainsi que leurs projections dans l'espace d'observation pertinent. Dans l'espace total ces deux trajectoires sont complètement différentes et ne coïncident jamais, ce sont deux histoires différentes d'un même système physique. Leurs projections sont aussi différentes comme le montrent les lignes dans le plan $\{< Ob1 >, < Ob2 >\}$. Mais ces dernières se coupent cependant, c'est à dire que les représentations coïncident, à un instant donné. Dans cette espace d'observation réduit où la dynamique a été projetée, nous avons l'illusion à cet instant de voir un même état du système. Si l'on considère uniquement ce point, on peut croire que les deux projections correspondent à une même trajectoire et imaginer que leur devenir doit être semblable aux instants à venir et que leur passé a aussi été le même. Or si l'on cherche à obtenir plus d'information sur ces états projetés du système, c'est à dire si l'on effectue d'autres observations complémentaires, ces dernières, comme le montre la figure, nous apparaîtront alors distinctes. On conçoit alors sans difficulté le fait qu'elle puissent avoir un passé et un avenir différents, et nous ne somme pas surpris de les voir se séparer après une courte rencontre “virtuelle”. Ainsi nous comprenons que si l'on possède une information restreinte sur l'état instantané d'un système, deux états identiques dans un espace d'observation réduit peuvent très bien avoir des devenirs divergents étant donné qu'ils ne sont équivalents à cet instant qu'en ce qui concerne un petit nombre de considérations mais qu'ils diffèrent l'un de l'autre à de nombreux autres égards.

Le chaos n'existe donc pas rigoureusement en mécanique quantique [10] mais notre incapacité à décrire de façon complète les objets que nous étudions nous conduit à restreindre notre connaissance sur ces systèmes à un petit nombre d'observations pertinentes. Ainsi l'évolution dans le temps de ces grandeurs peut mimer un comportement chaotique du fait de l'ignorance partielle que nous avons sur ce système qui joue un rôle non négligeable dans son évolution au cours du temps.

4 Conclusion

Dans cette contribution nous avons vu que l'évolution dans le temps d'un système physique complexe, constitué de plusieurs entités élémentaires en interaction les unes avec les autres, peut être représentée dans un espace multidimensionnel par une succession de points que l'on appelle trajectoire. Cette trajectoire est la solution d'une ou plusieurs équations différentielles traduisant l'évolution dans le temps de ce système physique et prenant en compte les interactions entre les constituants de ce système. Selon la complexité du système, deux classes d'évolutions dans le temps se présentent. Si le système est simple ou si sa description peut être réduite à un petit nombre contrôlable d'observations, l'évolution du système peut être prédite pendant un temps assez long. Si les constituants du système interagissent fortement les uns avec les autres, il devient alors nécessaire de prendre en compte toutes les corrélations entre les observables. La dynamique devient alors très complexe et notre incapacité à décrire ou appréhender l'évolution du système nous conduit à ne considérer qu'un petit nombre d'observations pertinentes. Cette projection de la dynamique dans un espace réduit d'observation a pour conséquence un perte d'information sur l'état exact du système. Une telle approximation peut alors mimer un comportement chaotique. Cette incapacité à prévoir l'évolution de l'état instantané du système nous conduit à adopter une approche statistique du problème. Celle-ci consiste à prendre en compte notre ignorance sur l'état exact instantané du système et ne plus chercher à suivre dans le temps une unique trajectoire. Cette approche cherche à reproduire statistiquement toutes les configurations que le système emprunte au cours de son voyage chaotique dans l'espace des configurations.

5 Remerciements

Ce travail a été réalisé en collaboration avec Philippe Chomaz et Chabouh Lyazidjian au Grand Accélérateur National d'Ions Lourds de Caen. De nombreuses discussions avec Francesca Gulminelli et Olivier Juillet du Laboratoire de physique corpusculaire de Caen ont permis d'orienter cette étude.

Références

[1] A. Liapounov, Problème général de la stabilite du mouvement, Edition J. Gabay (1988)

[2] L'ordre du chaos, Bibliothèque pour la science (1997)

[3] P. Bergé, Y. Pommeau, Ch. Vidal, L'ordre dans le chaos, Hermann (1988)

[4] P. Manneville, Systèmes dynamiques et chaos, Cours de l'Ecole Polytechnique (1999)

[5] B. Diu, C.Guthmann, D. Lederer, B. Roulet, Physique Statistique, Hermann

[6] Press, Flannery, Teukolsky, Vetterling, Numerical Recipes, The art of science computing, Cambridge University Press

[7] O. Juillet, cours de physique statistique D.E.A de Caen http ://www.physique-eea.unicaen.fr/ tice/pdf/cours.htm

[8] P. Chomaz, Stochastic approaches to out-of-equilibrium dynamics, Cours de l'ecole de Seville (1997)

[9] P. Chomaz, Habilitation à diriger des recherches et cours de physique statistique du D.E.A de Caen

[10] M. Berry, Quantum Chaology, Physica Scripta 40, 335 (1989)

[11] S. Faure http ://www-lpm2c.grenoble.cnrs.fr/faure/