A/ Questions de cours

Un graphe biparti peut-il contenir un cycle de longueur impaire ? Donner un exemple ou justifier.
Quelle est l'équation générique du polynôme chromatique d'un graphe à une composante connexe ?
Quelle est l'équation générique du polynôme chromatique d'un graphe à N composantes connexes ?

B/ Problème

On note A(Z ,V) le graphe obtenu par la décomposition de Hajos d'un graphe G(X,U). Les noeuds de A correspondent à chaque étape de cette décomposition. On note Z0 le noeud qui correspond à l'initialisation de la décomposition (c'est à dire que Z0 correspond à G avec un choix de sommets disjoints).

1/ Combien A possède t-il de cycle ? Comment se nomme ce type de graphe ?

2/ Soit la matrice d'adjacence de G :

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On exécute la décomposition de Hajos comme en cours et TD, en notant tous les couples de sommets reliés les uns après les autres jusqu'à obtention d'une clique. Dès qu'une clique est obtenue, on note à la suite de cette liste le couple précédent qui n'a pas encore été contracté, et on le contracte.

- Si la contraction de ce couple donne un graphe G' qui n'est pas une clique, on exécute le même processus sur G', en notant les sommets traités à la suite de la liste.
- Si la contraction de ce couple est une clique, alors on contracte le précédent couple non contracté (s'il exite), et on réitère le processus, sinon fin de l'exécution.

  On obtient alors avec G la liste des sommets qui forme cette matrice ME1 avec pour chaque colonne le couple considéré :

$$ME1 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 & 2 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Représenter le graphe A qui correspond à cette exécution, et donner le polynôme chromatique de G.

3/ Quelle est dans A la longueur du chemin le plus long entre Z0 et une clique obtenue ?

4/ Quelle est la longueur moyenne P de tous les chemins de Z0 à chaque clique obtenue ?

5/ On relance Hajos avec un autre couple initial, on obtient

$$ME2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

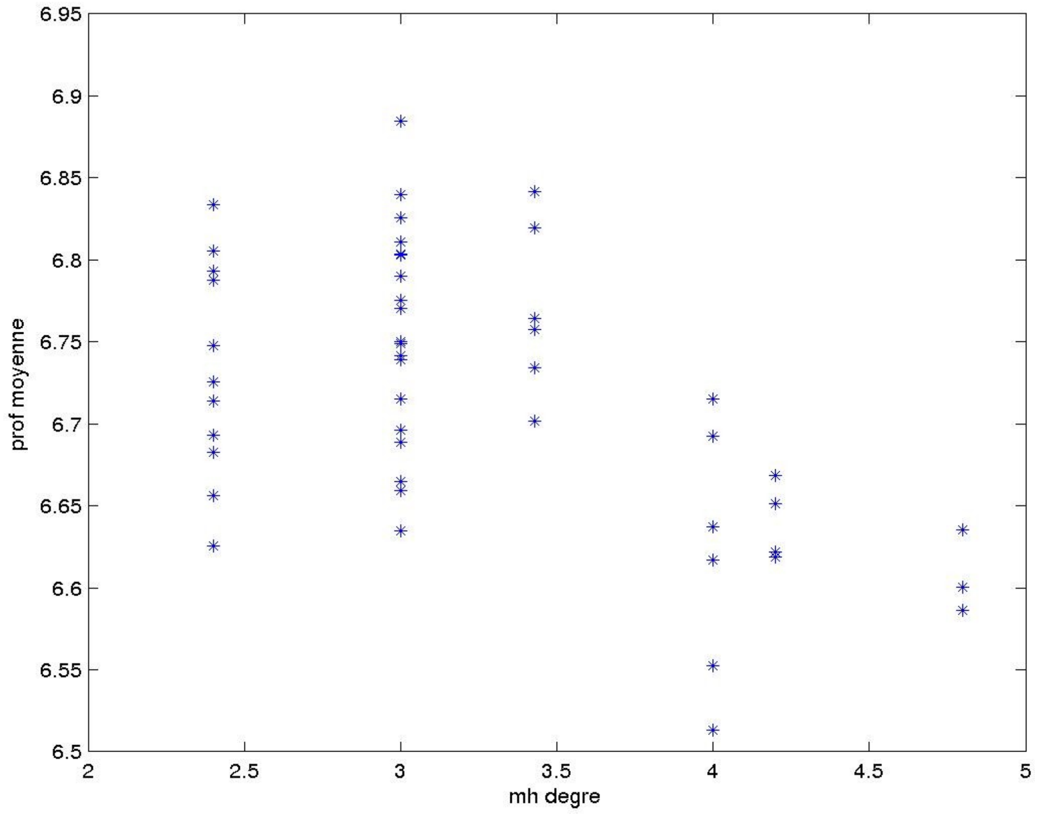
Que vaut maintenant P ?

6/ Quels sont les degrés des sommets des couples initiaux dans ME1 et ME2 ?
Pensez-vous que P puisse être liée à ces degrés (justifier votre analyse en 3 lignes suivant le principe de formation d'une clique) ?

7/ Soit la moyenne harmonique H de deux réels a et b. H est forte si a et b sont en harmonie et s'ils sont forts.
Par exemple H(2,3) = 2.4 > H(4,1)=1.6 alors que leur moyenne arithmétique est identique.

On donne H pour les degrés du premier couple dans ME1 = 1, et pour ME2 = 1.33.
Vérifiez votre hypothèse de la question 6.

8/ On traite le cas d'un graphe à 10 sommets. On exécute 50 fois Hajos avec des couples initiaux différents. On obtient donc 50 moyennes de degrés initiaux, et 50 valeurs de P correspondantes. On trace ces valeurs ci dessous. Commentez en 5 lignes.



9/ En déduire une stratégie pour minimiser P sur des grands graphes.

Nb : Dans le cas d'une implémentation récursive de Hajos, votre stratégie s'avère salutaire pour son exécution sur un gros graphe !